

Вступительная работа по математике в 8 класс. 20 марта 2023 г.

1 вариант

Таблица ответов

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3,5	73,2	-9	50	76	0,75	18	160	16	9
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
28	112211	71	15	1	24	5	2023	12	36

Задачи, оцениваемые в 1 балл

1. Выполните действия

$$2\frac{1}{3} : \left( 2 - 17\frac{1}{3} : 13 \right).$$

Решение.  $2\frac{1}{3} : \left( 2 - 17\frac{1}{3} : 13 \right) = \frac{7}{3} : \left( 2 - \frac{52}{3} \cdot \frac{1}{13} \right) = \frac{7}{3} : \left( 2 - \frac{4}{3} \right) = \frac{7}{3} : \frac{2}{3} = 3,5.$

Ответ: 3,5.

2. Данное число увеличили в 1,732 раза. На сколько процентов увеличилось данное число?

Ответ: на 73,2%.

Решение. Когда число увеличили в 1,732 раза, оно увеличилось на 73,2%.

3. Найти значение выражения  $-8a^2 - 2ax - x^2 - (-4a^2 - 2ax - x^2)$  при  $a = -\frac{3}{2}$  и  $x = -2$ .

Решение.  $-8a^2 - 2ax - x^2 - (-4a^2 - 2ax - x^2) = -4a^2$ , значит, значение выражения равно  $-9$ .

Ответ:  $-9$ .

4. Найдите значение выражения  $\frac{357^2 + 2 \cdot 343 \cdot 357 + 343^2}{357^2 - 343^2}$ .

Решение.

$$\frac{357^2 + 2 \cdot 343 \cdot 357 + 343^2}{357^2 - 343^2} = \frac{(357 + 343)^2}{(357 - 343)(357 + 343)} = \frac{700^2}{14 \cdot 700} = \frac{700}{14} = 50$$

Ответ: 50.

5. Сумма вертикальных углов  $AND$  и  $CNB$ , образованных при пересечении прямых  $AB$  и  $CD$  в точке  $N$ , равна  $208^\circ$ . Найдите угол  $ANC$ .

Решение.  $\angle AND = \angle CNB = 208^\circ : 2 = 104^\circ$ , откуда

$$\angle ANC = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ.$$

Ответ:  $76^\circ$ .

6. Упростите выражение  $\frac{a^7(b^5 + 7b^5)}{b^4(8a^9 + a^9)}$  и найдите его значение при  $a = 1\frac{1}{3}$ ,  $b = 1,5$ .

Ответ запишите в виде десятичной дроби.

Решение:  $\frac{a^7(b^5 + 7b^5)}{b^4(8a^9 + a^9)} = \frac{8a^7b^5}{9a^9b^4} = \frac{8b}{9a^2}$ . При  $a = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ ,  $b = 1,5 = \frac{3}{2}$  получим

$$\frac{8 \cdot \frac{3}{2}}{9 \cdot \frac{16}{9}} = \frac{4 \cdot 3}{16} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Ответ: 0,75.

7. Разность квадратов двух последовательных натуральных чисел равна 37. Найдите меньшее число.

Решение. Пусть  $x$  – меньшее из чисел, тогда  $x + 1$  – большее число, следовательно,

$$(x + 1)^2 - x^2 = 37.$$

Решаем полученное уравнение:

$$x^2 + 2x + 1 - x^2 = 37,$$

$$2x + 1 = 37,$$

$$x = 18.$$

Ответ: 18.

8. Матроскин может выловить всех рыбок из аквариума за 2 минуты, а Шарик – за 4 минуты. За сколько секунд выловит всех рыбок галчонок Хватайка, если его скорость вылавливания рыбок равна средней скорости Матроскина и Шарика.

Решение. За одну минуту Матроскин вылавливает половину всех рыб, а Шарик – четверть, среднее арифметическое скоростей Матроскина и Шарика  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{4}$  равно  $\frac{3}{8}$ .

Тогда галчонок на вылавливание рыбок понадобится  $\frac{8}{3}$  минуты или 160 секунд.

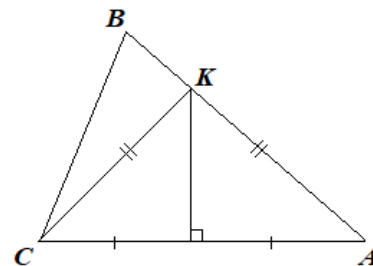
Ответ: 160 секунд.

9. Серединный перпендикуляр стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  пересекает его сторону  $AB$  в точке  $K$ . Найдите сторону  $AB$  треугольника  $ABC$ , если  $BC = 7$  см, а периметр треугольника  $BKC$  равен 23 см.

Решение. Очевидно, что  $AK = CK$ . Тогда

$$P_{BKC} = BC + BK + CK = BC + BK + AK = BC + AB = 7 + AB = 23, \\ = 7 + AB = 23, \text{ откуда } AB = 16.$$

Ответ: 16.



10. Найдите сумму всех значений  $a$ , при которых корнем уравнения

$$-2 \cdot |3x - 2a| + 3 = x - 1 \text{ является число } 3.$$

*Решение.* Так как число 3 – корень данного уравнения, то  $-2 \cdot |3 \cdot 3 - 2a| + 3 = 3 - 1$ , откуда получаем, что  $|9 - 2a| = 0,5$ , поэтому  $9 - 2a = 0,5$  или  $9 - 2a = -0,5$ . Искомыми значениями  $a$  являются  $a = 4,25$  и  $a = 4,75$ . Их сумма равна 9.

*Ответ:* 9.

*Задачи, оцениваемые в 2 балла*

11. На планете Пе 31 декабря 2022 года было 76 государств. По древней традиции каждый год 1 января некоторые три государства объединяются и образуют одно новое государство, а некоторое другое государство распадается на два новых. Сколько государств будет на планете Пе 2 января 2070 года?

*Решение.* Первого января каждого года вместо трёх государств образуется одно (минус два государства), а одно распадается на два (плюс одно государство), таким образом, 1 января каждого года количество государств уменьшается на одно. За обозначенный период произойдёт 48 таких изменений (первый раз – 1 января 2023 г, последний раз – 1 января 2070 г), поэтому останется  $76 - 48 = 28$  государств.

*Ответ.* 28.

12. Сумма двух чисел равна 1111110. В разряде тысяч и разряде сотен большего числа стоит по цифре 8. В тех же разрядах меньшего числа стоит по цифре 2. Если заменить эти цифры нулями, то получатся новые числа, одно из которых в 9 раз больше другого. Найдите меньшее из исходных чисел.

*Решение.* Пусть  $x$  – меньшее из чисел с нулями в разрядах сотен и тысяч, тогда  $9x$  – большее из полученных чисел. Следовательно, меньшее из исходных чисел  $x + 2200$ , а большее –  $9x + 8800$ , то есть  $x + 2200 + 9x + 8800 = 1111110$ , откуда  $x = 110011$ .

Меньшее из исходных чисел равно 112211.

*Ответ:* 112211.

13. На базу приехали туристы. При расселении туристов в палатки оказалось, что если в каждую палатку поселить 6 туристов, то 5 туристам не хватит места, а если расселять по 7 туристов, то 6 мест останутся свободными. Сколько туристов приехало на базу?

*Решение.* Пусть  $n$  – количество палаток на турбазе, тогда  $6n + 5 = 7n - 6$ , откуда  $n = 11$ , следовательно, на базу приехали  $6 \cdot 11 + 5 = 71$  турист.

*Ответ.* 71.

14. Произведение частного, делителя и делимого (все числа – натуральные) равно 225. Найдите делимое.

*Решение.* Пусть  $a = \frac{b}{c}$ , значит,  $b = ac$ . Из условия задачи  $a \cdot b \cdot c = 225$ , поэтому

$b^2 = 225$ , откуда  $b = 15$ .

*Ответ.* 15.

15. В классе учится меньше 50 учеников. За контрольную работу  $\frac{1}{7}$  часть учеников получила пятёрки, третья – четвёрки, половина – пятёрки. Остальные работы оценены как неудовлетворительные. Сколько школьников получили двойки?

*Решение.* Количество учеников в классе должно быть кратно 7, 3 и 2. Единственное число, меньшее 50, удовлетворяющее этому условию, –  $7 \cdot 3 \cdot 2 = 42$ . Двойки получили  $42 \cdot \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = 42 - 6 - 14 - 21 = 1$  ученик.

*Ответ.* 1.

16. Наибольший общий делитель двух натуральных чисел равен 24, а сумма этих чисел равна 96. Найдите меньшее из этих чисел.

*Решение.* Поскольку  $\text{НОД}(x; y) = 24$ , то  $x = 24m$ ,  $y = 24n$ , причём числа  $m$  и  $n$  взаимно просты.  $24m + 24n = 96$ ,  $m + n = 4$ . Только две пары натуральных чисел удовлетворяют этому уравнению: (1;3) и (2;2). Вторая пара не подходит (числа 2 и 2 не взаимно просты). Искомые числа 24 и 72.

*Ответ.* 24.

17. На какое наименьшее число частей может быть разделена плоскость четырьмя различными прямыми?

*Решение.* Плоскость делится четырьмя прямыми на наименьшее возможное число частей в том случае, если ни одна из прямых не пересекает другую, то есть все четыре прямые параллельны. Итак, наименьшее число частей равно 5.

*Ответ:* 5.

18. Назовём натуральное число «замечательным», если оно самое маленькое среди натуральных чисел с такой же как у него суммой цифр. Чему равна сумма цифр 2023-го замечательного числа?

*Решение.* Все замечательные числа имеют различные суммы цифр, поэтому сумма цифр у 2023-го замечательного числа равна 2023. Очевидно, что числа с суммами цифр 1, 2, ..., 2022, 2023 существуют.

*Ответ.* 2023.

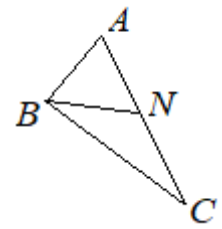
19. Сколько существует четырёхзначных чисел, произведение цифр которых равно 10?

*Решение.* Так как  $10 = 2 \cdot 5$ , то любое из искомым четырёхзначных чисел содержит цифры 2, 5, 1, 1. Если число содержит разные цифры  $a$  и  $b$ , отличные от 0 и 1, и две цифры 1, то из них можно составить 6 различных чисел:  $\overline{11ab}$ ,  $\overline{a11b}$ ,  $\overline{ab11}$ ,  $\overline{1a1b}$ ,  $\overline{1ab1}$ ,  $\overline{a1b1}$ . Меняя  $a$  и  $b$  местами, получим ещё 6 чисел. Всего таких чисел 12.

*Ответ:* 12.

20. Биссектриса остроугольного треугольника делит его на 2 равнобедренных треугольника. Найдите наименьший угол исходного треугольника.

*Решение.* Пусть в треугольнике  $ABC$  биссектриса  $BN$  делит его на два равнобедренных треугольника  $ABN$  и  $BNC$  (см. рис.). Так как углы  $\angle ANB$  и  $\angle BNC$  – смежные, то один из них, например,  $\angle BNC$  не меньше  $90^\circ$ , поэтому в равнобедренном  $BNC$  он может являться только углом при вершине. Тогда  $BN = NC$  и  $\angle NBC = \angle NCB = \alpha$ . Но тогда и  $\angle ABN = \alpha$ .  $\angle ANB$  – внешний угол треугольника  $BNC$ , поэтому  $\angle ANB = \angle NBC + \angle NCB = 2\alpha$ . В треугольнике  $ABC$



$$\angle BAC = 180^\circ - \angle BCN - \angle CBA = 180^\circ - 3\alpha.$$

Так как треугольник  $ABN$  – равнобедренный, а  $\angle ANB = 2\alpha$  и  $\angle ABN = \alpha$ , то либо  $180^\circ - 3\alpha = 2\alpha$ , либо  $180^\circ - 3\alpha = \alpha$ . В первом случае  $\alpha = 36^\circ$ , во втором –  $\alpha = 45^\circ$  (второй случай невозможен, потому что тогда  $\angle ABC = 90^\circ$ , но треугольник  $ABC$  – остроугольный).

Углы треугольника  $ABC$ :  $\angle A = \angle B = 72^\circ$ ,  $\angle C = 36^\circ$ . Наименьший угол равен  $36^\circ$ .  
*Ответ:*  $36^\circ$ .

Вступительная работа по математике в 8 класс. 20 марта 2023 г.

2 вариант

Таблица ответов

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	87,5	9	20	78	0,03	16	225	14	$-3\frac{1}{3}$
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
35	99779	74	25	23	51	11	146	6	72

Задачи, оцениваемые в 1 балл

1. Выполните действия

$$\left(3\frac{3}{8} \cdot 1\frac{7}{9} - 3\right) : \frac{3}{5}.$$

Ответ: 5.

2. Данное число уменьшили в 8 раз. На сколько процентов уменьшилось данное число?

Ответ: 87,5%.

3. Найдите значение выражения  $9a^2 - 5ac + c^2 - (-7a^2 - 5ac + c^2)$  при  $a = \frac{3}{4}$ ,  $c = -3$ .

Ответ: 9.

4. Найдите значение выражения  $\frac{738^2 - 2 \cdot 138 \cdot 738 + 138^2}{268^2 - 232^2}$ .

Ответ: 20.

5. Сумма вертикальных углов  $MOE$  и  $DOC$ , образованных при пересечении прямых  $MC$  и  $DE$  в точке  $O$ , равна  $204^\circ$ . Найдите угол  $MOD$ .

Ответ:  $78^\circ$ .

6. Упростите выражение  $\frac{x^{13}(y^6 + 4y^6)}{y^7(8x^{11} + x^{11})}$  и найдите его значение при  $x = 0,3$ ,  $y = 1\frac{2}{3}$ .

Ответ запишите в виде десятичной дроби.

Ответ: 0,03.

7. Разность квадратов двух последовательных натуральных чётных чисел равна 60. Найдите большее число.

Ответ: 16.

8. Таня может съесть все конфеты за 3 минуты, а Маша – за 5 минут. За сколько секунд съест все конфеты Данил, если его скорость поедания конфет равна средней скорости Маши и Тани.

Ответ: 225 секунд.

9. Серединный перпендикуляр стороны  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекает его сторону  $AC$  в точке  $D$ . Найдите периметр треугольника  $BDC$ , если  $AC = 8$  см,  $BC = 6$  см.

*Ответ:* 14 см.

10. Найдите сумму всех значений  $a$ , при которых корнем уравнения  $-3 \cdot |3a - 5x| + 2 = -5 - x$  является число  $-1$ .

*Ответ:*  $-3\frac{1}{3}$ .

*Задачи, оцениваемые в 2 балла*

11. Государство Рмь 31 декабря 2022 года состояло из 83 княжеств. По инициативе правительства каждый год 1 января 4 княжества объединяются в одно, в то же время по инициативе оппозиционных сил другое княжество распадается на три новых. Сколько княжеств будет в государстве Рмь 2 января 2070 года?

*Ответ:* 35.

12. Сумма двух чисел равна 111110. В разряде сотен и разряде десятков большего числа стоит по цифре 7. В тех же разрядах меньшего числа стоит по цифре 3. Если заменить эти цифры нулями, то получатся новые числа, одно из которых в 9 раз больше другого. Найдите большее из исходных чисел.

*Ответ:* 99779.

13. В детский лагерь приехали школьники. При расселении детей в комнаты оказалось, что если в каждую комнату поселить 7 школьников, то 4 школьникам не хватит места, а если расселять по 8 школьников, то 6 мест останутся свободными. Сколько детей приехало в лагерь?

*Ответ:* 74.

14. Произведение частного, делителя и делимого (все числа – натуральные) равно 625. Найдите делимое.

*Ответ:* 25.

15. В сдаче норм ГТО участвовали меньше 120 человек. Золотой значок получила  $\frac{1}{11}$  часть спортсменов, серебряный – одна пятая часть, а бронзовый – половина всех участников. Остальным не удалось выполнить нормативы. Сколько участников не сдали нормы?

*Ответ:* 23.

16. Наибольший общий делитель двух натуральных чисел равен 17, а сумма этих чисел равна 68. Найдите большее из этих чисел.

*Ответ:* 51.

17. На какое наибольшее число частей может быть разделена плоскость четырьмя прямыми?

*Ответ:* 11. (Достигается, если все прямые пересекаются в попарно разных точках).

18. Назовём натуральное число «исключительным», если оно самое маленькое среди натуральных чисел с такой же как у него суммой цифр. Чему равна сумма цифр 146-го исключительного числа?

*Ответ.* 146.

19. Сколько существует трёхзначных чисел, сумма цифр которых равна 3?

*Решение.* Сумма цифр равна 3, если число состоит либо из цифр 3, 0, 0, либо 2, 1, 0, либо 1, 1, 1. В первом случае имеется одно число – 300, во втором – 4 числа: 210, 201, 120, 102, в третьем – одно число 111. Всего таких чисел 6.

*Ответ:* 6.

20. Биссектриса остроугольного треугольника делит его на 2 равнобедренных треугольника. Найдите наибольший угол исходного треугольника.

*Ответ:*  $72^{\circ}$ .